www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours National d'admission 1989 ESCAE

MATHÉMATIQUES I

OPTION GÉNÉRALE

DURÉE : 4 heures

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

De nombreuses questions sont indépendantes des précédentes ou s'appuient sur des résultats donnés dans l'énoncé.

Avec ce sujet est distribuée une feuille de papier millimétré.

On rappelle que la notation $o(x^n)$ désigne une fonction négligeable devant x^n (au voisinage du point considéré).

Pour x réel on pose :

$$\varphi(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

lire $e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale.

La fonction φ est connue sous le nom d'intégrale de DAWSON.

1° *a.* Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver que φ est impaire. On supposera dans la suite que: $x \in \mathbb{R}^+$.

2° *a.* Établir que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et donner une relation entre x, $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$.

b. Démontrer, pour tout entier naturel n, que $\varphi^{(n)}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi^{(n)}(x) = P_n(x)\,\varphi(x) + Q_n(x).$$

($\varphi^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ ; $\varphi^{(0)} = \varphi$)

c. Expliciter $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ pour $n \in \{1, 2, 3\}$.

d. Déterminer le terme de plus haut degré de chacun des polynômes P_n et Q_n.

3° *a.* Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi^{(n+1)}(x) = -2x\,\varphi^{(n)}(x) - 2n\,\varphi^{(n-1)}(x).$$

b. Montrer que φ admet un développement limité à tout ordre N ($N \in \mathbb{N}$) au voisinage de zéro.

c. Si on note : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + o(x^N)$ au voisinage de zéro, calculer a_{2k} ($k \in \mathbb{N}$) et démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = \frac{(-4)^k\, k!}{(2k+1)!}$$

Expliciter les nombres a_j pour $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant 7$ sous forme de fractions irréductibles.

4° Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ xe^{-x^2} \leqslant \varphi(x) \leqslant x.$

5° *a.* Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,dt.$

b. A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, prouver que $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt$ est équivalent à $\dfrac{e^{x^2}}{2x}$ au voisinage de plus l'infini.

c. En déduire un équivalent simple de φ en plus l'infini.

Tournez la page S.V.P.

6° *a.* Montrer qu'il existe au moins un élément x_0 de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi'(x_0) = 0$. **Ne pas chercher à calculer x_0.**

b. Vérifier que $M_0\,(x_0\,;\,\varphi(x_0))$ appartient à la courbe (H) d'équation $y = \dfrac{1}{2x}$.

c. D'une étude succincte de ψ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \psi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2x}$$

déduire la position de (Φ) (d'équation $y = \varphi(x)$) par rapport à (H) au voisinage de M_0.

d. Montrer que φ présente un maximum local en x_0.

e. α) En supposant que φ admette deux maximums locaux x_0 et x_0' $(x_0 < x_0')$, établir l'existence d'au moins un minimum local en un point x_0'' tel que : $x_0 < x_0'' < x_0'$.

β) En déduire l'unicité de x_0 en lequel φ admet un maximum.

f. Calculer une valeur approchée de $\varphi(x)$ pour $x \in \{0{,}8\,;\,0{,}9\,;\,1\}$ à l'aide d'une calculatrice programmable. En déduire un encadrement de x_0.

7° *a.* Montrer que les points d'inflexion de (Φ) sont sur la courbe (I) d'équation : $y = \dfrac{x}{2x^2 - 1}$.

b. Calculer la limite de φ' en plus l'infini. En déduire que (Φ) possède un point d'inflexion M_1 d'abscisse x_1 supérieure à x_0.

8° Calculer une valeur approchée de $\varphi(2)$ et $\varphi(3)$ à l'aide d'une calculatrice programmable.

Tracer (Φ) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités : 8 cm sur ox, 16 cm sur oy).

9° On considère la série de terme général $a_n x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (les a_n sont ceux définis dans la 3ᵉ question) où x est un élément quelconque fixé de $\mathbb{R}_+^*$.

a. Calculer : $\quad b_k = \dfrac{|a_{2k+3}\,x^{2k+3}|}{|a_{2k+1}\,x^{2k+1}|}$

b. Démontrer qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ \left(k \geqslant p \Rightarrow b_k \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

c. Établir que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ \left(k \geqslant p \Rightarrow |a_{2k+1}\,x^{2k+1}| \leqslant \frac{1}{2^{k-p}}\,|a_{2p+1}\,x^{2p+1}|\right)$$

d. En déduire que $\sum a_n x^n$ converge.

e. On suppose que $x = \dfrac{1}{2}$. Décrire un algorithme permettant de calculer :

$$S_{2m+1} = \sum_{n=0}^{2m+1} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

où m est un élément de $\mathbb{N}$ donné.

10° *a.* Montrer qu'il existe un couple unique de polynômes R et T de degrés respectifs 1 et 2 tels que $T(0) = 1$ et que, posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \gamma(x) = \frac{x\,R(x^2)}{T(x^2)}$$

on ait : $\varphi(x) - \gamma(x) = o(x^8)$ au voisinage de zéro.

($P(x^2)$ désigne le polynôme obtenu en substituant x^2 à X dans le polynôme P(X)).

b. Tracer alors la courbe (Γ) d'équation $y = \gamma(x)$ sur la même figure que (Φ).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail